

ХІІІ Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Погляд у майбутнє приладобудування», 13-14 травня 2020 року, КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

УДК 51.76+614.2

Р.О. Ботвінко, студ. гр. ПН-91мп, к.т.н. К.М. Божко, Б.В. Мельничук, студ. гр. ПН-91мп, А.Д. Руденко, студ. гр. ПН-91мп
КПІ ім. Ігоря Сікорського

ЗАСТОСУВАННЯ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ПРОГНОЗУ ПІКУ ЗАХВОРЮВАНЬ НА COVID19 В КИЄВІ

Анотація. Математичне моделювання широко використовують для опису процесу розповсюдження епідемій. Автори надають огляд модельного підходу до опису динаміки епідемії в окремій країні чи в окремому місті. Основою моделювання є популяційна модель, а також створена на її основі модель Барояна-Рвачева. В даній роботі автори на основі аналізу доступних наразі статистичних даних про перебіг пандемії COVID19 у різних країнах спробували визначити пікові дні для кількості захворювань корона-вірусом для міста Києва. При цьому задача не може бути вирішена точно, оскільки наразі не вистачає даних для визначення параметрів диференціальних рівнянь моделі. Проте, після закінчення пандемії і отриманні більш повних статистичних даних по COVID19 можна повернутись до цієї задачі і визначити точні терміни проходження піку захворювань для можливої другої хвилі пандемії.

Ключові слова: COVID19, популяційна модель, модель Барояна-Рвачева, пік захворювань, пандемія, логістична крива або S-функція.

ВСТУП

Точне визначення піку захворювань на COVID19 має велике економічне і гуманітарне значення, адже без зайвих матеріальних втрат і з мінімальним ризиком повторного сплеску епідемії воно дозволяє здійснити комплекс поетапних заходів для виходу з карантину. На жаль, наразі не існує методології для вирішення даної проблеми. Пряме застосування існуючих математичних моделей неможливе, оскільки поки що є невідомими точні значення параметрів процесу розповсюдження цього захворювання. Використання вірогідних значень параметрів надає похибку у десятки і сотні відсотків і не може бути прийнятним. Причиною незадовільного стану вирішення зазначеної проблеми є новизна явища, яким є пандемія COVID19 (для окремої території ми будемо також використовувати назву «епідемія»).

Проте, вже існують розроблені моделі для розповсюдження епідемії грипу, основою яких покладено популяційну модель. Крім того, станом на 26 квітня 2020 року ми маємо вже достатньо статистичних даних по більшості країн світу з перебігу процесу поширення захворювання на COVID19. Аналіз моделей та статистики надав можливість авторам з певними обмеженнями виконати прогноз піку захворювань для Києва.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕПІДЕМІЧНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ

Перед початком розгляду математичних моделей необхідно з'ясувати, чи підпадає залежність кількості захворювань від часу під логістичну криву (S-функцію)? Для цього наведемо приклад епідемічного стану в Австралії [1], де епідемія станом на 26 квітня 2020 року практично завершилась. На рисунку 1 наведено сумарну кількість захворювань на COVID19 з 10 березня по 26 квітня включно. Графік захворюваності починаємо будувати з точки у 100 інфікованих осіб. Досягнення цієї кількості захворювань свідчить про їх невинновідомість на даній території і є ознакою розвитку епідемічного процесу.

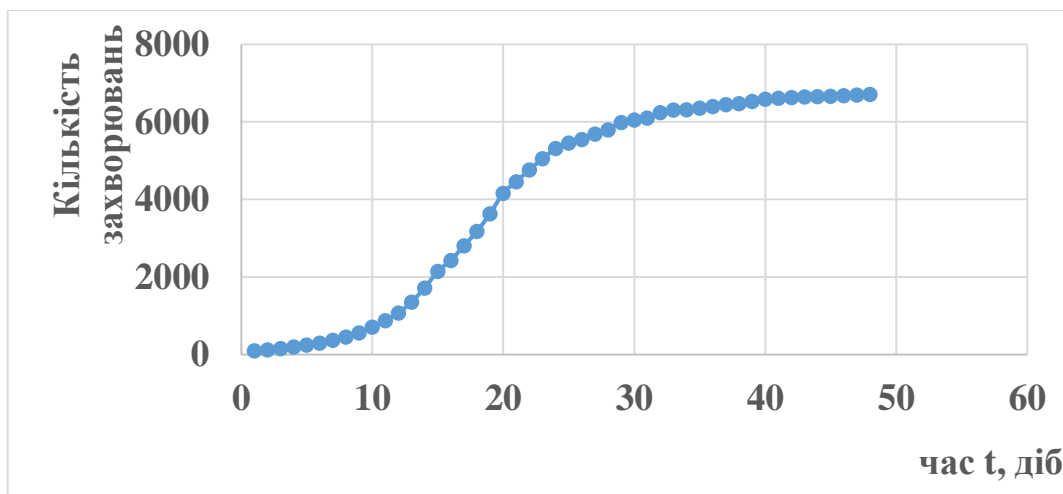


Рисунок 1. Сумарна кількість захворювань на COVID19 в Австралії з 10 березня по 26 квітня 2020 року

Австралійська модель розвитку епідемії COVID19 має вигляд типової закінченої S-функції, точкою перегину якої є половинна кількість захворювань, що і характеризує досягнення піку (дивись рис.1). Розвиток захворюваності тут стрімкий і піку було досягнуто лише через 18 діб після виявлення значимої стартової величини у 100 захворювань, а десятикратне підвищення цієї кількості – на 12-ту добу від старту. При загальній кількості захворювань 6711 [1,2] станом на 26 квітня значима стартова кількість складає 1,5% від загалу.

Із популяційною моделлю в медицині читачі можуть ознайомитись за допомогою відомих джерел, наприклад, [3]. Популяційна модель була вдосконалена і застосована з метою прогнозування епідемій грипу. Вдосконалена епідеміологічна модель отримала назву своїх авторів – Барояна і Рвачева [4]. Сучасні дослідження з математичного моделювання епідемій грипу мають на меті прогноз піку захворювань в межах окремих територій і мегаполісів [5,6]. Підґрунтям цих досліджень є також модель Барояна-Рвачева.

Методологія математичного моделювання епідемій, яка була розроблена академіком Барояном і професором Рвачевим в СРСР у 1960-70 рр., отримала назву ЕПІДДИНАМІКА. Дана методологія заснована на методі наукової аналогії у відображенні епідемічного процесу, суть якого полягає у перенесенні збудника інфекції від хворих до здорових, з перенесенням речовини та енергії в рівняннях математичної фізики. Під час розвитку епідемії серед населення ураженої території формується складний процес перенесення популяції збудника на спільноту чутливих (без виробленого імунітету) людей. Епідемічний процес відображають як в календарному часі t , так і у внутрішньому часі τ , що фіксує розвиток інфекційної хвороби серед множини осіб, які вражені інфекцією.

Епідемічний процес описує система нелінійних рівнянь у часткових похідних з відповідними початковими та граничними умовами. Розробку моделей в парадигмі ЕПІДДИНАМІКИ виконують на основі балансів «потоків» індивідуумів, які проходять основні стадії інфекційного процесу типу SEIR, де S – чутливі до збудника, E – в інкубації, I – інфіковані хворі, R – ті, що перехворіли. Математична модель Барояна-Рвачева епідемії має вигляд системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{\lambda}{P(t)} X(t) \int Y(\tau, t) d\tau; \quad (1)$$

$$\frac{\partial U(\tau, t)}{\partial \tau} + \frac{\partial U(\tau, t)}{\partial t} = -\gamma(\tau) U(\tau, t); \quad (2)$$

$$\frac{\partial Y(\tau, t)}{\partial \tau} + \frac{\partial Y(\tau, t)}{\partial t} = \gamma(\tau) U(\tau, t) - \delta(\tau) Y(\tau, t); \quad (3)$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \int \delta(\tau) Y(\tau, t) d\tau; \quad (4)$$

До системи рівнянь (1) – (4) додають граничні умови у вигляді (5) – (6)

$$U(0, t) = \frac{\lambda}{P(t)} X(t) \int Y(\tau, t) d\tau; \quad (5)$$

$$Y(0, t) = 0; \quad (6)$$

Початкові умови для рівнянь (1) – (4) мають вигляд (7) – (10)

$$X(t_0) = \alpha P(t_0); \quad (7)$$

$$Z(t_0) = (1 - \alpha) P(t_0); \quad (8)$$

$$U(\tau, 0) = U(\tau) \text{ при } 0 < \tau < \tau_u; \quad (9)$$

$$Y(\tau, 0) = Y(\tau) \text{ при } 0 < \tau < \tau_y; \quad (10)$$

Де $t > 0$ – календарний час розвитку епідемії (днів); $\tau > 0$ – внутрішній час розвитку інфекційного процесу; λ – середня частота передачі збудника від інфекційних хворих $Y(t)$ до чутливих до зараження осіб $X(t)$; $\gamma(\tau)$ – функція розвитку інфекційного періоду; P – населення території, яка уражена епідемією (тис. осіб); α – доля чутливих до інфікування осіб серед населення.

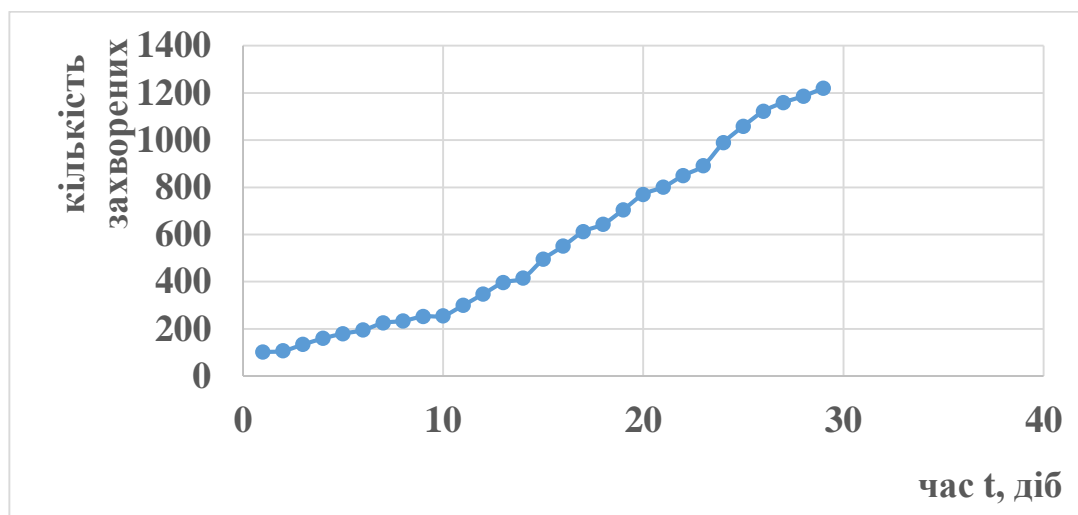
Ефективність моделі Барояна-Рвачева була продемонстрована у 1970-і роки при прогнозуванні більш як 170 епідемій грипу на території більше 100 міст СРСР [4]. Потім було реалізовано математичні моделі для дослідження епідемій і спалахів важливих інфекцій типу SEnImRF, де E_n – “n” стадій інкубаційного періоду; I_m – “m” стадій різних клінічних форм інфекційного захворювання; R – кількість перехворілих; F – кількість смертей [6].

Наразі невідома більшість функцій і параметрів епідемії COVID19 на тільки для Києва, але і будь-де в світі. Тому пряме використання моделі Барояна-Рвачева для прогнозування перебігу інфекції в методології SEIR або SEnImRF до закінчення першої хвилі COVID19 неможливе. Проте, дана модель стає придатною для чисельного експерименту з прогнозування захворюваності при повторному розповсюдженні коронавірусу.

ПРОГНОЗ ПІКУ ЗАХВОРЮВАНЬ НА ОСНОВІ СТАТИСТИКИ

На думку авторів, для визначення піку захворювань важливим припущенням є логістична форма залежності сумарної кількості захворювань від часу. Території і країни можуть мати різні параметри цієї кривої при однаковому її типі. Пік визначаємо при досягненні половини захворювань від очікуваного максимуму на основі аналогій із іншими країнами, які вже подолали пік. При порівнянні із іншими країнами, для Києва перебіг подій (форма кривої) дещо схожий на британську модель, але більше він схожий на модель Чехії. У Великій Британії пік досягнуто 24 квітня, накопичення суттєвої стартової кількості (100 осіб) відбулось 5 березня. Тривалість циклу досягнення піку склала 50 днів. В Чехії пік досягнуто на 24 добу, в Австралії – через 18 днів [2].

Як визначити термін досягнення піку в Києві? Поки що відомий термін 10-кратного збільшення кількості захворювань. Для Києва цей термін дорівнює 24 доби, для Великої Британії – 13 діб, для Австралії – 12 діб, для Чехії – 10 діб. Термін досягнення піку приблизно в 1,5-4 рази довший за термін десятикратного збільшення кількості захворювань. На думку авторів, піку епідемії COVID19 в Києві слід очікувати приблизно на 50 день від стартової позиції на 30 березня. Це має відбутися 18 травня 2020 року. Це є оптимістичний сценарій, що відповідає чеській моделі перебігу епідемії COVID19. Криву захворювань в Києві побудовано за даними мінфіну [1] та наведено на рисунку 2.



Рисункок 2. Захворення у Києві з 30 березня по 27 квітня 2020 року

Таким чином отримано прогноз для піку захворювань на COVID19 в Києві. Похибка прогнозу орієнтовно дорівнює ± 4 доби. В основу прогнозу покладено чеську модель епідемії. На відміну від Чехії процес захворювання у Києві більш повільний.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Минфин. Режим доступа: <https://index.minfin.com.ua/reference/coronavirus/geography/australia/>
- [2] Coronavirus. Режим доступа: <https://www.worldometers.info/coronavirus/>
- [3] Бейли Н. *Математика в биологии и медицине*/Н.Бейли – М.: Мир, 1970 – 326с.
- [4] Бароян О.В. *Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа для территории СССР* / О.В. Бароян, Л.А. Рвачев, Ю.Г. Иванников. – М.: Издат. ИЭМ. им. Н.Ф. Гамалеи, 1977.– 546 с.
- [5] Леоненко В.Н. *Предсказание пиков эпидемий гриппа в Санкт-Петербурге с помощью популяционных математических моделей* / В.Н. Леоненко, Ю.К. Новоселова, К.М. Онг // Н.-т. вестник ИТМО. 2016. Т.16, № 6. – С. 1145–1148.
- [6] Leonenko V.N. *A computational approach to investigate patterns of acute respiratory illness dynamics in the regions with distinct seasonal climate transitions* / V.N. Leonenko, S.V. Ivanov, Yu.K. Novoselova // Procedia Computer Science. 2016, Vol. 80. – P.2402–2412.

Наук. керівник – к.т.н. Божко К.М.